Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Michael Lösch — Sommersemester 2020

Reelle Algebra und Einführung
in die o-Minimalität
Blatt 4
Abgabe: 18.06.2020, 11Uhr

Aufgabe 1 (5 Punkte)**.**
Sei K ein reell abgeschlossener Körper mit einem dichten Teilkörper F (bezüglich der Ordnungstopologie auf K).
Beschreibe die Gruppe der Körperautomorphismen von K, welche F punktweise fixieren.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**
Sei K ein reell abgeschlossener Körper und $PT) = \sum_{k=0}^{n} c_k T^k$ ein Polynom in $K[T]$ derart, dass $P(a) = P(b) = 0$ für zwei Elemente $a < b$ aus K. Zeige, dass die formelle Ableitung

$$P'(T) = \sum_{k\geq 1}^{n} c_k \cdot k \cdot T^{k-1}$$

eine Nullstelle im Intervall (a, b) besitzt. Insbesondere gilt Rolle'scher Satz in jedem reell abgeschlossener Körper für polynomiale Funktionen.
Hinweis: Schreibe $P(T) = (T-a)^n(T-b)^m Q(T)$ für ein geeignetes Polynom Q.

Aufgabe 3 (5 Punkte)**.**
Schließe aus Aufgabe 2, dass der Mittelwertsatz für polynomiale Funktionen in jedem reell abgeschlossener Körper gilt: Gegeben ein Polynom $P(T)$ über einem ein reell abgeschlossenen Körper K und zwei Elemente $a < b$ aus K gibt es einen Punkt c im Intervall (a, b) mit

$$P'(c) = \frac{P(b) - P(a)}{b - a}.$$

Insbesondere ist P streng monoton wachsend im Intervall $[a, b]$, wenn die Ableitung P' echt positiv im Intervall (a, b) ist.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.